PART2　２つのグラフの間の面積

例題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

Point Pickup

練習

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2-x+4$，$y=-3x+1$　　(2)　$y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

第18講　PART2 確認問題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1　$y=-x^2-3x+7$，$y=-4x+1$

$$S=\frac{\boxed{アイウ}}{\boxed{エ}}$$

2　$y=x^2-3x$，$y=-x^2-4x+3$

$$S=\frac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケ}}$$

PART2　２つのグラフの間の面積

例題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

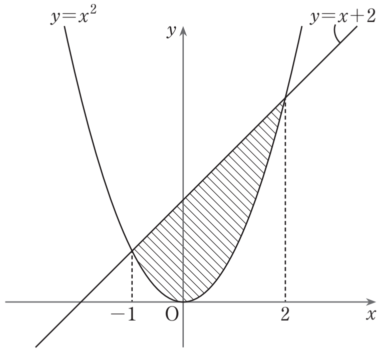
(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2=x+2$$

つまり $x^2-x-2=0$ の解である。これを解くと

$$x=-1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

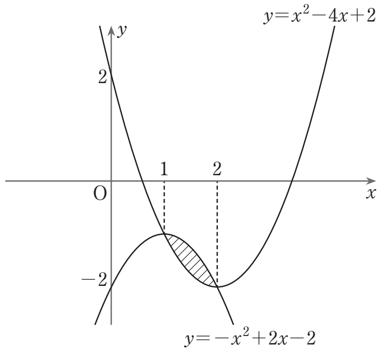
(2)　２つの放物線 $y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$$

つまり $x^2-3x+2=0$ の解である。これを解くと

$$x=1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{1}{3}$$

練習

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2-x+4$，$y=-3x+1$　　(2)　$y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

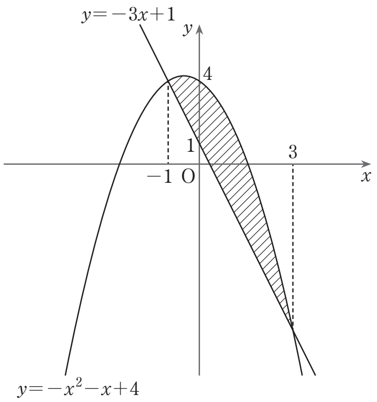
(1)　放物線 $y=-x^2-x+4$ と直線 $y=-3x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2-x+4=-3x+1$$

つまり $x^2-2x-3=0$ の解である。これを解くと

$$x=-1,\ 3$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2-x+4)-(-3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

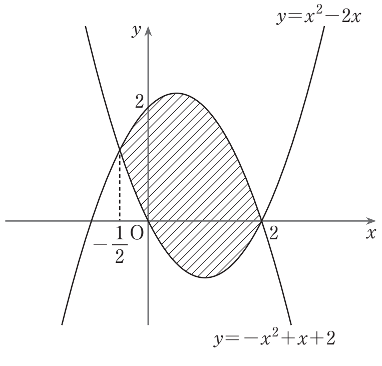
(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x=-x^2+x+2$$

つまり $2x^2-3x-2=0$ の解である。これを解くと

$$x=-\frac{1}{2},\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)=\frac{125}{24}$$

第18講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** アイウ：125，エ：6

[解説]

放物線 $y=-x^2-3x+7$ と 直線 $y=-4x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2-3x+7=-4x+1$$ [A]

つまり　$x^2-x-6=0$ の解である。これを解くと

$$x=-2,\ 3$$

よって，求める面積 S は，下図より

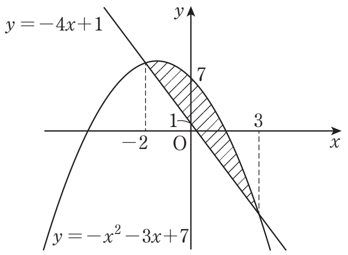
$$S=\int_{-2}^{3}\{(-x^2-3x+7)-(-4x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{3}$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)$$

$$=\mathbf{\frac{125}{6}}$$



[A]　2 曲線の間の面積

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2 曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の共有点をもとに，積分範囲 $a\leqq x\leqq b$ を定める。

④ 区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

常に $f(x)\leqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

2 [正解] オカキ：125，クケ：24

[解説]

2 つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=-x^2-4x+3$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-3x=-x^2-4x+3$$ [B]

つまり　$2x^2+x-3=0$ の解である。これを解くと

$$x=-\frac{3}{2},\ 1$$

よって，求める面積 S は，下図より

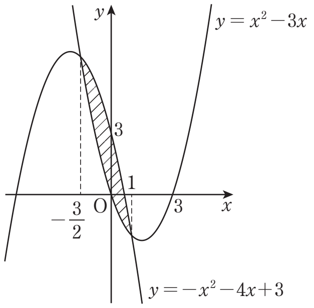
$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\{(-x^2-4x+3)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(-2x^2-x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{8}-\frac{9}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{125}{24}}$$



[B]　2 曲線の間の面積

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2 曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の共有点をもとに，積分範囲 $a \leqq x \leqq b$ を定める。

④ 区間 $a \leqq x \leqq b$ において

常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

常に $f(x) \leqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$$